□史凯敏

隐耀之珠

——刘歆异径管律的设计智慧

摘　要：在律学发展史上，异径管律是解决管口校正问题的重要方法。早在《汉书·律历志》中已载刘歆异径管律的设计，但由于记录简略，被后人所误解和忽视，致其隐没于历史尘埃。刘歆律的设计，与其历律度量衡五法一体的钟律理论密切相关，他通过一套以数为桥梁的律—易—历同构理论，阐释“爻律”通天道、卜吉凶的逻辑，提供历律度量衡制度的合法性。新莽无射律管与汉代计量文物不但证明刘歆黄钟律的形制大小符合文献记载，还证明这是一套用“以水测积”“以积定径”的方法设计制作的异径管律。本文通过制管验声实验，发现刘歆已实现通过改变管径解决管口校正，奏出准确音高。刘歆律的价值在于：不但提供了中国最早的管口校正方案，启发了后世从管径着手解决管口校正问题，而且实现了黄钟律管同时作为律、度、量、衡标准器的功能，是中国古代律学史、音乐声学史、科学技术史上不应被隐没的一颗明珠。

关键词：刘歆；异径管律；管口校正；钟律；黄钟

DOI:10.14113/j.cnki.cn11-1316/j.2025.01.007

刘歆是汉代著名的经学家、政治家，但历史上对刘歆及其律学理论的评价一直有争议。班固说他“讲六艺、传记、诸子、诗赋、术数、方技，无所不究”①。章太炎盛赞“孔子殁，名实足以抗者，汉之刘歆”②。他不但对中国古代天文学、文献目录学、计量学有巨大贡献，对古代律学尤其是管律理论的发展，同样影响深远。汉平帝元始元年（1），刘歆作为王莽的政治盟友出任“羲和”，同时掌管天文律历和全国钱谷赋税、均输、平准等财政事务。此后，他带领百余名通晓钟律、历法、算学的学者考证前代钟律之学，编订《钟律书》③，因其“言之最详”，班固将主要内容收入《汉书·律历志》，包括“备数、和声、审度、嘉量、权衡”五项内容，五法一体，互为参校，即以黄钟律形制数据为基值制定历律度量衡制度法则，规定黄钟大数 177147 为始三分损益以定五声，律长 90 分以定五度，律积 810 分为 1 龠以定五量，容黍 1200 粒重 12 铢以定五权④，以律积为日法制定三统历。新莽始建国元年（9），官拜国师的刘歆按照这一理论制造了一批律度量衡标准器，今考古出土的新莽始建国铜嘉量、铜方斗、铜龠、铜升、铜斛等量器铭文中使用“律嘉量”“律量斗（或升 / 籥）”此类命名，数套新

作者简介：史凯敏（1982~　），女，安徽师范大学音乐学院副教授，硕士研究生导师。

①《汉书》卷 36《楚元王传第六》，中华书局 1964 年标点本，第 7 册，第 1967 页。

② 朱维铮：《章太炎全集·检论·订孔上》，上海人民出版社 2014 年标点本，第 432 页。

③ 成书于元始五年，见余作胜《〈钟律书〉考辨》，《中国音乐》2014 年第 4 期。

④ 五度（10000 分 =1000 寸 =100 尺 =10 丈 =1 引），五量（2000 龠 =1000 合 =100 升 =10 斗 =1 斛），五权（46080 铢 =1920 两 =120 斤 =4 钧 =1 石，五声（宫徵商羽角）。据《汉书·律历志》卷 21 上，中华书局 1964 年标点本，第 4 册，第 955—972 页整理。

中国知网　https://www.cnki.net

莽铜权上有“律权石”“律九斤”“律六斤”等字样[①]，显示了“律”对国计民生的重要意义，这套钟律理论也成为历代王朝确定历律度量衡最重要的依据。因而，刘歆律应是律学史上的重要成果。但历史上，先有北魏安丰王元延明评价刘歆律“不合黄钟商徵之声”[②]，后有明代朱载堉批判“刘歆伪辞全无可取”，认为刘歆黄钟律长不合西汉尺度，并质疑黄钟长度 90 分与积实 810 分的关系不成立，评价“闰历以八十一分为法，取象黄钟一龠之长，非谓积实也。则黄钟绝无长九十分，积八百一十分之理矣”[③]。马承源、潘建明先生认为：“度量起源于黄钟是汉代律官们的看法，黄钟律管不是容器，不能作为测定容积之用。……在黄钟和龠之间再也找不出数值上有其他共同之处了。”[④]

但当代计量学的研究已经肯定：在尺制上，刘歆律尺与汉代度尺长度是一致的，刘歆黄钟律长正合汉尺 9 寸。研究者依据商鞅方升[⑤]和存世汉尺（12 支西汉尺、86 支东汉尺）确认的秦汉尺制与刘复先生测定的“新莽铜嘉量尺”，均为 23.1 厘米[⑥]。然而，对刘歆律的评价还有以下问题需要清理：刘歆是如何设计整套律管的？以黄钟律管长 90 分，容积 810 分为一龠之实[⑦]的说法，是停留在纸面的设想还是确定计量标准的实用值？这套律管发音是否合律？本文通过对文献和汉代律量衡考古成果的分析，确定刘歆律管形制，进而复原制作并测音实验，验证前人评判，认识其理论和实践价值。

一、刘歆“律易历”同构的律数理论，阐释了新朝历律度量衡制度的合法性

新莽政权建立后，需要一套合理的天命阐释话语来解释“迭代”后的王权合法性。“法制度量，王者典器也。”[⑧]历法准确意味着农事可定，天命有归，整顿经济则首先要厘定度、量、衡标准。《尚书·舜典》“协时月正日，同律度量衡”[⑨]作为“先王之法”，自然是制定历律度量衡制度的有力依据和思想基础。秦汉之际盛行谶纬之学，在天人感应观念下，“乐纬”“日书”以阴阳五行之学解读万事万物，将音乐、律高附会其中，占卜人事吉凶。在这样的历史语境下，刘歆在前人基础上，为律与历、度、量、衡相关的数据设置了一套极为复杂的数字关系，通过对数的阐释，为他设计的律管以及由黄钟而定的历法和度量衡制度，赋予了神圣的意义和神秘的功能。

（一）黄钟九寸为始，律易同构释“三统”

《汉书·律历志》保留了《钟律书》的主要内容，在“和声”篇中，表述了一个以数为桥梁，极为严密的律—易—历同构系统。刘歆以数为桥梁，通过对律长九、六、八的阐释，建构“黄、林、太”三律“统天”“统地”“统人”的功能，赋予历法“三统”之义：

三统者，天施，地化，人事之纪也。十一月，“乾”之初九，阳气伏于地下，始著为一，万物萌动，钟于太阴，故黄钟为天统，律长九寸。九者，所以究极中和，为万物元也。《易》曰：“立天之道，曰阴与阳。”六月，“坤”之初六，阴气受任于太阳，继养化柔，万物生长，茂之于未，令种刚强大，故林钟为地统，律长六寸。六者，所以含阳之施，茂之于六合之内，令刚柔有体也。“立地之道，曰柔与刚。”“‘乾’知太始，‘坤’作成物。”正月，“乾”之九二，万物棣通，族出于寅，人奉而成之，仁以养之，义以行之，令事物各得其理。寅，木也，为仁；其声，商也，为义。故太族为人统，律长八寸，

---

① 丘光明、邱隆、杨平：《中国科学技术史·度量衡卷》，科学出版社，2001 年，第 222、228 页。

②《隋书》卷 16《律历上》，中华书局 1973 年标点本，第 393 页。

③ 闰历指落下闳、邓平的太初历，将一日分为八十一分。见［明］朱载堉撰，冯文慈点注《律吕精义·内篇》“卷之一”“卷之五”，人民音乐出版社 2006 年标点本，第 1、144 页。

④ 马承源、潘建明：《新莽无射律管对黄鐘十二律研究的启示》，《上海博物馆集刊》1991 年第 00 期。

⑤ 唐兰：《商鞅量与商鞅量尺》，载《唐兰先生金文论集》，紫禁城出版社，1995 年，第 25—30 页。

⑥ 丘光明、邱隆、杨平：《中国科学技术史·度量衡卷》，第 196 页。

⑦“合龠为合，十合为升，十升为斗，十斗为斛，而五量嘉矣。……龠者，黄钟律之实也”。见《汉书·律历志》卷 21 上，第 967 页。

⑧ 黎翔凤撰，梁运华整理：《管子校注》，中华书局，2004 年，第 728 页。

⑨ 王世舜、王翠叶译注：《尚书》，中华书局，2012 年，第 18 页。

中国知网 https://www.cnki.net

象八卦，宓戏氏之所以顺天地，通神明，类万物之情也。……此三律之谓矣，是为三统。①

律历易同构的思想与古人逐渐成熟的阴阳五行认知模式密切相关。从《管子》《吕氏春秋·十二纪》《礼记·月令》到《淮南子·时则训》，均可以看到律对应于空间、时间、物候、五行、阴阳二气的升降变化，如历法般具有“计时”“方位”等意义。刘歆在继承先秦对宇宙万物描述方式的基础上，借用《周易》将与律相关的数字神秘化、功能化。

在《周易》中，用“—”表示最大的奇数九，称阳爻；用“– –”表示居中的偶数六，称阴爻。阴阳二爻组成八种卦画符号表示阴阳进退，每一爻有相应爻辞。根据重卦的规则，初爻、二爻表“地道”；三爻、四爻表“人道”；五爻、上爻表“天道”。②《易·说卦》：“昔者圣人之作《易》也，幽赞于神明而生蓍，参天两地而倚数，观变于阴阳而立卦，发挥于刚柔而生爻，……乾为天，为圜，为君，为父，为玉，为金……坤为地，为母，为布，为釜。”③刘歆建构了一套律数与易数的对应关系（如图1），六律对应乾卦六阳爻，在自然中象征天，在人伦中象征父（夫），形为圆；六吕对应坤卦六阴爻，象征地，象征母（妻），形为方；并解释“数者……其数以《易》大衍之数五十，其用四十九，成阳六爻，得周流六虚之象也。声者……六为虚，五为声，周流于六虚。虚者，爻律夫阴阳，登降运行，列为十二，而律吕和矣”④。律能“统气类物”，吕则辅助“旅阳宣气”⑤，五声在阳律阴吕上的运转被类比为“变动不居，周流六虚”的天道运行，十二律由此具有了远超出音乐本身的功能，“上升”为可立卦占算的“爻律”。

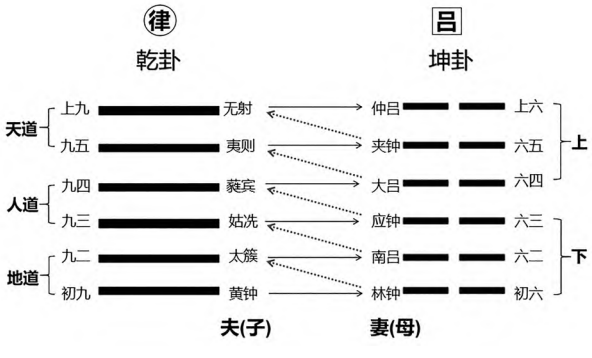


图1 律易同构图（自制）

刘歆通过这套阴阳运行的数字逻辑，阐释了“三统律”的内涵：“三统者，天施，地化，人事之纪也……后以裁成天地之道，辅相天地之宜，以左右民。此三律之谓矣，是为三统。”⑥黄钟九寸居乾位，如阳气始动，为天统、天正；林钟六寸居坤位，为地统、地正；大族（太簇）八寸象八卦，乃天地之道而生，为人统、人正。律吕的相生关系被称作“九六相生”，既有“阴阳相生”之意，也符合三分损益生律法的数理规律（$\frac{6}{9}=\frac{2}{3}$），并呼应“三天两地”易卦立数之义。自黄钟九寸生林钟六寸，如夫妻阴阳同位相配；以林钟为母生太簇，异位由阴生阳恰如“母生子”，随着汉末郑玄注经，这种认知成为被官方认可的“经典学说”：

黄钟之初九，下生林钟之初六，林钟又上生大蔟之九二，大蔟又下生南吕之六二，南吕又上生姑洗之九三，姑洗又下生应钟之六三，应钟又上生蕤宾之九四，蕤宾又上生大吕之六四，大吕又下生夷则之九五，夷则又上生夹钟之六五，夹钟又下生无射之上九，无射又上生中吕之上六。同位者象夫妻，异位者象子母，所谓律娶妻而吕生子也。⑦

“律娶妻，吕生子”的说法以及今天一些民间乐社艺人们把“黄钟生林钟说成是‘子欺母’”⑧，是律—易—历同构思想在数千年来的历史遗绪。刘歆通过对律长的数字阐释，解读了律吕相生之法如何呼应阴阳相生之序、天地运行之道、夫妇人伦之义，为以“律”来通天定历、占卜人事休咎，打通了功能通道，准备了一套合理化的“说辞”。

（二）律容八十一寸为日法，以律起历通天文

刘歆通过对黄钟容积数的阐释，以律历同构的

①《汉书·律历志》卷21上，第961页。

② 孙振声编著：《易经今译》，海南人民出版社，1988年，第5—6页。

③［清］李道平撰，潘雨廷点校：《周易集解纂疏》，中华书局1994年标点本，第704—706页。

④《汉书·律历志》卷21上，第956、964页。

⑤“律十有二，阳六为律，阴六为吕。律以统气类物，……吕以旅阳宣气，……有三统之义焉。”《汉书·律历志》卷21上，第959页。

⑥《汉书·律历志》卷21上，第961—962页。

⑦［清］阮元校刻：《十三经注疏·周礼注疏》卷23“大师”，中华书局2009年影印本，第2册，第1717页。

⑧ 李玫：《“燕乐二十八调”文献通考》，科学出版社，2019年，第227页。

中国知网 https://www.cnki.net

方式，为日法和度量衡标准提供合法性。汉武帝元封七年（前 104），落下闳、邓平采用“以律起历”的方式制定太初历，把黄钟律容积 81 寸（即 810 分）作为历法推算常数的依据，用八十一分历取代了秦、汉前期一直使用的四分历（颛顼历）。刘歆三统历是在继承太初历基础上建立的。

其法以律起历，曰：“律容一龠，积八十一寸，则一日之分也。与长相终。律长九寸，……故黄钟纪元气之谓律。律，法也，莫不取法焉。”与邓平所治同。于是皆观新星度、日月行，更以算推，如闳、平法。法，一月之日二十九日八十一分日之四十三。①

八十一分历就是将一天的时间分为 81 分，作为日法（朔望月长度日数的分母）进行推算，则半日长 40.5/81 日，一月长 $29\frac{43}{81}$日，这是阴历的一个朔望月。取十九年七闰法，一回归年的长度为 $\frac{(12\times19+7)\times29\frac{43}{81}}{19}=365\frac{385}{1539}$日。研究者认为：“刘歆发现太初历运行近百年后，回归年长度、朔望月长度和岁星的恒星周期都偏大了，刘歆对此进行了修正，给出新的回归年长度为 365.24614 日，新的朔望月长度为 29.530496 日。”②这固然是观测与精密推算的结果，但新的历法需要天人之际的交互，还要体现历法与律度量衡的统一，刘歆为此准备了一整套关于天文数字的神秘关系：

《易》曰：“参天两地而倚数。”天之数始于一，终于二十有五。其义纪之以三，故置一得三又二十五分之六，凡二十五置，终天之数，得八十一，以天地五位之合终于十者乘之，为八百一十分，应历一统千五百三十九岁之章数，黄钟之实也。由此之义，起十二律之周径。③

他将历法的 19 年 7 闰和黄钟律积 810 分通过《易》数联系起来，天数是个位内的奇数相加之和，即 1+3+5+7+9=25，终天之数的来历是 $3\frac{6}{25}\times25=81$。81 扩大 10 倍就是 810 分。以 19 年 7 闰为时间周期来计算，章数就是 81×19=1539。

易数为黄钟律的长度和容量赋予了“天”的至高涵义，“日法八十一。元始黄钟初九自乘，一龠之数，得日法”④。其逻辑如下：首先将律长九寸对应《周易》乾卦阳爻初九，接着将日法 81 解释为黄钟易数初九的乘积，九九归一；即：长 9 寸—易（乾卦初九）—量（龠容 81 寸）—历（日法 81）。古人对阴阳五行的认知中，历法、乐律都与阴阳相关，通过将律数附会《易》数就搭建了以律起历的“合理”通道。

正如《新唐书·历志》评价：“其数起于黄钟之龠，盖其法一本于律矣。”⑤刘歆继承了邓平、落下闳“以律起历”的设计思路，并巧妙地将之联系于《易》数，容纳到一套先秦以来颇为盛行的阴阳五行学说中，建立起一系列看似神秘的复杂联系，使这种设计，这套数据和器物——黄钟十二律具有了“受命于天”“律通天道”的合理性、正当性，并为由黄钟而定的度量衡标准和历法织造了神圣、神秘的庄严外衣。

二、刘歆以管积定径的异径管律形制设计，蕴含古代科技智慧

《汉书》记载了刘歆对律管形制的设计（大字正文），尽管只有三律的数据，但规律可循：

……为八百一十分，应历一统千五百三十九岁之章数，黄钟之实也。繇此之义，起十二律之周径。（孟康曰：律空径三分，参天之数也；围九分，终天之数也）

……三百六十分，当期之日，林钟之实。（孟康曰：林钟长六寸，围六分。以围乘长，得积三百六十分也）

……六百四十分，以应六十四卦，太族之实也。（孟康曰：太簇长八寸，围八分，为积六百四十分也）⑥

正如前面所讨论的，为了实现“同律度量衡”，落下闳、刘歆非常重视律管容积，将之固定于历法，附会于天道。对黄钟律形制，再三强调：“律容一龠，积八十一寸，则一日之分也。”⑦“龠者，黄钟律之实也。”⑧“繇此（笔者按：黄钟之实）之义，起十二律之周径。”龠是汉代量器的基础单位，因此，积八十一寸（八百一十分⑨）是指黄钟律管的容积。

---

①《汉书·律历志》卷 21 上，第 975 页。

② 陈美东：《中国科学技术史·天文学卷》，科学出版社，2003 年，第 124、158 页。

③《汉书·律历志》卷 21 上，第 963 页。

④《汉书·律历志》卷 21 下，第 991 页。

⑤《新唐书》，中华书局 1975 年标点本，第 2 册，第 533 页。

⑥《汉书·律历志》卷 21 上，第 963 页。

⑦《汉书·律历志》卷 21 上，第 975 页。

⑧《汉书·律历志》卷 21 上，第 968 页。

⑨《汉书》对分、平方分、立方分不做文字区分，皆称为分，十分为寸，积八十一寸即八百一十分。

中国知网 https://www.cnki.net

依据《汉书》对黄钟、林钟、太簇三律之“实”的表述，已清楚地表明刘歆律形制设计的方法是——律长和律围同时进行三分损益计算，用容积来确定十二律之内径，这决定了此套律管必然是异径管律。但西晋孟康的注解（小字注文）却误导了后人对这一理论的解读。

（一）孟康误解刘歆律，以周定径的异径管律方案不可行

孟康错把“积”“实”当成了律管内壁的展开面积。从他“空径三分，围九分”的说法可知，他给出的是一套“以周定径”的方案[①]。即把“围”解为内管口的周长，等于管长的 1/10，运用“周三径一”的古率 3 计算，当黄钟周长 9 分时，内径是 3 分。按照孟康的方案，以黄钟为起点对管长和周长继续同时三分损益而定其余十一律的形制，结果必然是“管径随三分损益比率依次缩小”[②]。但问题是如果内径为 3 分，则管内横截面积（幂）仅为 6.75 分（π=3），律管容积仅有 607.5 分，即便是用度量衡界验证的刘歆圆周率 3.1547 计算[③]，容积也仅有 638.8 分，与黄钟积 810 分的设定值差距太大，而且还造成所有律管的长径比均为 30:1（见表 1，据“1 汉尺 =10 分 =100 寸 =231 毫米”换算）。实验证明：在长径比大于 26:1 以上，不开豁口的律管闭管几乎无法发声。[④]即便开管吹奏也很难，尤其是林钟以上诸律内径小于 4.5 毫米，更难成声。凭这两点，可以判定：孟康的理解虽然也是异径管律，但并不符合刘歆的设计，如果将“围”解做管口周长，“实”就成了管内壁展开面积，这就使黄钟律管失去了作为量制标准器的功能。同时，这一设计基本不具备在实践上的可操作性。

表 1　孟康异径管律形制推算表

	黄钟	大吕	太簇	夹钟	姑洗	仲吕	蕤宾	林钟	夷则	南吕	无射	应钟	清黄
长 / 围（寸 / 分）	9.00	8.43	8.00	7.49	7.11	6.66	6.32	6.00	5.62	5.33	4.99	4.74	4.44
内径（分）	3.00	2.81	2.67	2.50	2.37	2.22	2.11	2.00	1.88	1.78	1.67	1.58	1.5
内径（mm）	6.93	6.50	6.17	5.78	5.48	5.13	4.87	4.62	4.33	4.11	3.85	3.65	3.47
长径比	30 : 1	30 : 1	30 : 1	30 : 1	30 : 1	30 : 1	30 : 1	30 : 1	30 : 1	30 : 1	30 : 1	30 : 1	30 : 1

然而，孟康注影响巨大，很重要的一个原因是：“黄钟之管长九寸，径三分，围九分”[⑤]是东汉蔡邕时就有的说法，孟康只是描述了他所处时代的普遍认知；此后，韦昭注《国语》，《隋书·律历志》均持“径三围九”，把“围”当作周长，黄钟形制就是“长九寸，径三分”。在宋以前，这几乎是无人反驳的定论。戴念祖先生认为：“西晋孟康大概是第一个试图从管内径入手校正律管发音的人……（阮逸、胡瑗）是中国乐律史上第一次出现的三分损益的异径管律。”[⑥]徐飞通过计算也认为“孟康注是中国古

① 当内径为 3 时，面幂 $=\pi r^2=3\times(3/2)^2=6.75$ 分，周长 $=\pi d=3\times3=9$ 分。因此，孟康之“围”指周长。

② 徐飞：《西晋孟康异径管律考证——中国古代最早的异径管律管口校正方案》，《中国科技史料》2000 年第 3 期。

③ 1928 年刘复测算新莽铜嘉量后，提出“刘歆为王莽制造铜斛时，实际上使用的圆周率相当于 π=3.1547”。见郭书春《中国科学技术史·数学卷》，科学出版社，2010 年，第 268 页。同时度量衡界对“新莽铜嘉量数据”进行验证后，也肯定刘复刊于《辅仁学志》上的《故宫所存新嘉量之校量及推算》是目前最全面、最真实的反映新莽铜嘉量实际情况的数据。见《中国科学技术史·度量衡卷》，第 224 页。

④ 实验过程及结果详见史凯敏《中国古代律管造型的衍变——兼谈豁口作用》，《中国音乐》2022 年第 4 期。

⑤ 李贤注引蔡邕《月令章句》曰：“故曰黄钟之管长九寸，径三分，围九分，其余皆渐短，惟大小围数无增减。”见《后汉书·律历上》志第一，中华书局 1965 年标点本，第 3017 页。

⑥ 戴念祖：《中国古代在管口校正方面的成就》，《黄钟》1992 年第 4 期。

中国知网 https://www.cnki.net

代最早出现的异径管律设想……孟康提出的这套异径管律，在理论上已经很好地解决了全套律管的系统管口校正问题，可以使管律发音和弦律一致”①。马承源、潘建明先生也肯定“孟康的管径改变说是合理的”，并将其作为考证西汉黄钟十二律和复原验证新莽无射律管的依据，将黄钟管径按“三分”设为 6.93 毫米，按孟康方案算出的无射内径仅为 3.81667 毫米，与考古实测的无射律管径 5.771 毫米完全不符合，据此判断“黄钟律管不是容器，不能作为测定容积之用”②。

但也有学者敏锐地意识到：要符合刘歆的设计，只能把围理解为“管内横截面积”（即“空围面幂”）。如杨荫浏先生早在 20 世纪 40 年代就提出：“就从他（刘歆）所提起长度与积实的三个律管看，便可以知道，他是以九方分为黄钟面幂，以八方分为太簇面幂，以六方分为林钟面幂。”据 π=3.1415926 算出黄钟律长为 207.79776 毫米，律内直径为 3.385122 分，合 7.81582 毫米。③孙机④、张柏铭⑤也指出“孟康之所谓围，实际上是幂”。这些学者，均发现了孟康注文存在的问题，但即便把“孟注”释“围”为“幂”，仍存在黄钟“径三分”时，无法“围九分”的矛盾。须知，汉代仍用古率 3 算圆，魏晋时刘徽才用割圆术得到徽率（3.14）。刘歆说得清楚，“积”就是“实”，810 分的律积等同量器黄钟龠的量积。以“管积定径”才是刘歆确定这套律管形制的真正秘诀，这与当时的度量校测技术是密切相关的。

（二）以管积定径的刘歆异径管律方案，可以实现并被证实

根据黄、林、太三律的数据，按照生律法和几何原理可以推出刘歆律的全部数据。步骤如下：从黄钟开始，以三分损益法推算各律长、律围（起点为 9）。设容积为 V，律长为 L，$V=L^2/10$；设律管内径为 D，依圆柱体积公式 $V=L\cdot \pi D^2/4$，可推出 $D=\sqrt{4V/L\pi}$。设 π=3.1415926 时的理想内径为 D1，π=3 时的内径为 D2，代入后求出刘歆律长度、内径的理论值（见表 2），再用考古材料和实验进行验证。

表 2　刘歆异径管律形制数据表

律名	黄钟	大吕	太簇	夹钟	姑洗	仲吕	蕤宾	林钟	夷则	南吕	无射	应钟
律积（分）	810	709.81	640	561.45	505.66	443.62	399.55	360	315.84	284.41	249	224.68
律长（分）	90	84.3	80	74.9	71.1	66.6	63.2	60	56.2	53.3	49.9	47.4
L（mm）	207.90	194.62	184.8	173.09	164.26	153.86	146.02	138.6	129.82	123.19	115.27	109.49
内径 1（分）	3.385	3.275	3.192	3.089	3.009	2.912	2.837	2.764	2.675	2.606	2.521	2.457
D1（mm）	7.82	7.57	7.37	7.14	6.95	6.73	6.55	6.38	6.18	6.02	5.82	5.67
内径 2（分）	3.4641	3.3506	3.2660	3.1614	3.0794	2.9801	2.9033	2.8284	2.7374	2.6673	2.5794	2.5140
D2（mm）	8.00	7.74	7.54	7.30	7.11	6.88	6.71	6.53	6.32	6.16	5.96	5.81

① 徐飞：《西晋孟康异径管律考证——中国古代最早的异径管律管口校正方案》，《中国科技史料》2000 年第 3 期。

② 马承源、潘建明：《新莽无射律管对黄鐘十二律研究的启示》，《上海博物馆集刊》1991 年第 00 期。

③ 杨荫浏：《中国音乐史纲》，万叶书店，1952 年，第 152 页。

④ 孙机：《汉代黄钟律管和量制的关系》，《考古》1991 年第 5 期。

⑤ 张柏铭：《论汉代黄钟标准》，《交响》2002 年第 3 期。

中国知网 https://www.cnki.net

1. 出土量器证实黄钟内径非三分，黄钟容积是新莽量制的实用标准值

要回答黄钟律管的内径是否为孟康所说的三分、黄钟律管能否作为测定容积之用，最可靠的证据是汉代计量考古器物，依据度量衡考古研究成果中检索到的刻有容量铭文、来源明确的 8 件两汉时期的量器，统计实测容积后，折算为汉代一龠（1 斛 =10 斗 =100 升 =1000 合 =2000 龠）的容量。圆柱体的体积公式为 $V=L\cdot S=L\cdot \pi\ (d/2)^2$（V 为体积，L 为管长，S 为面幂，d 为管径，π=3.1415927），则内径 $d=2\times\sqrt{\frac{V}{\pi\times L}}$。黄钟管长无异议，汉代九寸合 20.79cm，将折合后的龠容量代入公式即可验证黄钟内径值。（表 3 中简称“黄径”）

表 3　汉代黄钟容量、内径统计推算表

	器名	来源	铭文	容量	实测容积（mL）	折合一龠（mL）	黄径（mm）	误差（mm）
1	西汉渑池宫铜升	陕西历史博物馆藏	渑池宫铜升……五凤元年工常㪷造	升	198	9.9	7.79	−0.03
2	西汉上林共府铜升①	天津博物馆藏	上林共府，初汉三年受琅琊，容一升	升	200	10	7.83	+0.01
3	西汉“河南五升平”铜量②	日本求古斋藏	河南五升平	五升	1000	10	7.83	+0.01
4	新莽铜嘉量③	台北故宫博物院藏	律嘉量斛……积千六百二十寸，容十斗。律嘉量斗……积百六十二寸，容十升。律嘉量升……积万六千二百分，容十合。律嘉量合……积千六百二十分，容二籥。律嘉量籥……积八百一十分，容如黄钟。	斛	20097.5	10.048	7.84	+0.02
				斗	2012.5	10.063	7.85	+0.03
				升	191.825	9.591	7.66	−0.16
				合	21.125	10.56	8.04	+0.22
				龠	10.65	10.65	8.08	+0.26
5	新莽始建国铜籥④	咸阳市博物馆藏	律量籥，方寸而圜其外，庞旁九毫，幂百六十二分，深五分，积八百一十分，容如黄钟。	龠	9.898	9.898	7.79	−0.03
6	新莽始建国铜升⑤	日本白鹤美术馆藏	律量升，方二寸二分而圜其外，庞旁四厘八毫，幂八寸一分，深二寸，积万六千二百分，容十合。	升	198	9.9	7.79	−0.03

① 西汉渑池宫铜升、西汉上林共府铜升见《中国科学技术史·度量衡卷》，第 212—213 页。

②〔日〕桥本开：《求古斋吉金图谱》，转引自熊长云《新见秦汉度量衡器集存》，中华书局，2018 年，第 86 页。

③ 丘光明、邱隆、杨平：《中国科学技术史·度量衡卷》，第 222 页。

④ 1970 年陕西咸阳市布里村出土，柄部刻铭文：“律量籥，方寸而圜其外，庞旁九毫，幂百六十二分，深五分，积八百一十分，容如黄钟。”背刻铭：“始建国元年正月癸酉朔日制。”全长 13 厘米，高 1.37 厘米，口径 3.7 厘米，实测籥内径 3.3 厘米，深 1.15 厘米，计容积 9.898 毫升。见金秋鹏《中国科学技术史·图录卷》，科学技术出版社，2008 年，第 502 页。

⑤ 全器长 17.7 厘米，高 4.9 厘米，口径 7.15 厘米，容小米 198 毫升。口沿一周反向相对阴刻铭文“始建国元年正月癸酉朔日制”，“律量升，方二寸二分而圜其外，庞旁四厘八毫，幂八寸一分，深二寸，积万六千二百分，容十合”。见容庚《海外吉金图录》下册，考古社 1935 年印行，第 146 页。

中国知网 https://www.cnki.net

（续表）

7	新莽始建国铜方斗	国家博物馆藏	律量斗，方六寸，深四寸五分，积百六十二寸，容十升。	斗	1978.25	9.891	7.79	−0.03
8	东汉“尚方造”铜籥①	澳门珍秦斋藏	容一籥，尚方造	龠	10	10	7.83	+0.01

以上 8 件汉代量器文物中，有 4 件是新莽始建国元年（9）由刘歆主持制造的，另有 3 件西汉量和 1 件东汉量。只有新莽铜嘉量中的“升”“合”“龠”反推出的黄钟内径分别为 7.66mm、8.04mm、8.08mm，与 7.82mm 的理想内径值的误差稍大，在 ±0.16~0.26mm。新莽铜嘉量是集龠、合、升、斗、斛五量于一体的设计，在制造检定时要保证各个部分，尤其是小量值器的精度较之单一量器要难得多，0.26 毫米的误差从制造技术上来看，是容许的。尤其是嘉量在斗、斛部位与其余 7 件两汉量器的实测容积反推出的黄钟内径值在 7.79~7.85mm，与理想值的误差仅有 ±0.01~0.03mm，可以说相当准确。因此，当表 3 去掉嘉量上误差大于 0.03mm 的三个值后，求得黄钟内径平均值为 7.8mm，约合汉代的 3.38 分。这就有力证实了汉代黄钟内径绝非孟康所说的 3 分（6.93mm）。黄钟律和龠之间并非如马承源、潘建明先生说的“仅在数值上有共同之处”，以黄钟容积为一龠（810 分）而定五量是实用性的汉代国家量制标准。新莽无射律管则能进一步证明黄钟律管是测定容积的标准器。

2. 新莽律管印证了刘歆以管积定径

传世的王莽始建国无射律管“上端完整，下端残缺，青铜铸制，残长 7.76 厘米。该律管有确切的管径，经上海计量局对孔径完整的一端用万能工具显微镜做米字形测定，得出其内径平均值为 0.5771 厘米，外径平均值为 1.062 厘米。该律管的原有长度，据铭文排列的距离推算，应为 11.2 厘米；距管径推算为 11.215 厘米，按古代三分损益法计算长度为 11.54 厘米”②。

当 π=3.1415927 时，从起始律黄钟推算的无射律理论上长 4.99 寸（合 115.27mm），内径 2.519 分（合 5.82mm）（见表 2），律管内径的理想理论值与实测值仅差 0.049 毫米，高度吻合。这证明了刘歆以管积定径的异径管律真实存在，并再次证明刘歆律黄钟内径不是孟康所说的“三分”。

从表 3 考古实测对表 2 内径推算值的验证上看，当 π=3 时，黄钟律管（8mm）和无射律管（5.96mm）的内径推算值与实测数值的差值较大，因此，可以排除 π=3 的可能。更多汉量考古实测的结果显示其实用的 π 值处于 3.1415926~3.1547 之间。

（三）校测异径律管的关键技术：以度审容，以水测积，以积定径

从目前出土的秦汉计量考古实物及研究来看，汉代没有精确到毫米级的尺，更没有专门测量内径的尺。那么，古人是如何保障这套异径律管形制尤其是“内径”的准确呢？尽管历代王朝多以《汉志》所云“累黍法”作为确定律度量衡值的基本方法，但通过此前用 5 种黍进行“累黍”实验，以及对 17 种秬黍“千粒重”的统计，发现正如许多律学家的怀疑——仅用累黍法无法保障度、量、衡的稳定和准确。③朱载堉指出古人校量的关键技术是“以水测积”：

《汉书·律历志》曰：“以井水准其概。”古人用水校量，其有以哉！用水必须使之极平，然后得其真数，否则高低一分，差一分之积矣。却以此升中水尽注于斗，则十升为一斗而不差矣。④

依据表 2，我们复原制作了刘歆律进行实验（见图 2），其中黄钟管的容积（一龠）为 $V=\pi r^2L=3.1415927\times(0.7819/2)^2\times20.79\approx10.17$ 毫

① 熊长云：《新见秦汉度量衡器集存》，中华书局，2018 年，第 150 页。

② 王莽始建国无射律管，历经多次著录，1979 年为上海博物院收藏。器身有纵向刻铭二行：“无射始建国元年”“正月癸酉朔日制”。见《中国音乐文物大系·上海卷》，大象出版社，1996 年，第 126 页。图片于 2020 年 9 月笔者摄自国家博物馆“天地同和——中国古代乐器展”。

③ 实验过程详见史凯敏《中国古代定黄钟技术钩沉》，《中国音乐》2023 年第 6 期。此处不赘。

④［明］朱载堉撰，冯文慈点注：《律学新说·论校量器当以水准概》，人民音乐出版社，1986 年，第 251 页。

中国知网 https://www.cnki.net

升，容水约 10.17 克，《后汉书》记载冬至候气时“权水轻重，水一升，冬重十三两”①，1 升 =20 龠，1 龠容水 13 ÷ 20=0.65 两，1 斤为 16 两，则可推出汉代 1 斤为 10.17 ÷ 0.65 × 16=250.4 克。“这与度量衡研究者通过统计有实物可考的 59 件秦权确定的秦标准量值在 250 ± 2 克 / 斤是一致的，也与依据出土的西汉权衡器、计重金币厘定的西汉衡制在 250 克 / 斤上下是一致的。……这也是证明汉代人已经认识并利用水的比重为标准，进行律、量、衡器的实际测算和校验的重要证据。”“《汉志》虽然并未记载以水校测的具体方法，但从经验推测可能分为两个步骤，先‘以水测积’，再‘以积定径’，……校测容积的诀窍是用方积替换圆积。例如新莽无射律管的设计要求是积 249 分，只要用容 250 分（长宽高为 5 分 ×5 分 ×10 分）的长方体容器即可取得，当 4.99 寸长的律管无法装满 250 分（1 分可忽略）的水时，就继续打磨内径直到达到所需容积，则此时律管内径自然就是 5.81 毫米（合汉尺 2.5152 分），余律准此。……这种检测的方法既精确又简便，事实上，这也是在当时技术条件下实现异径管律形制要求的唯一可行办法。”②而且，直到今天在计量研究中仍运用类似的方法——“通常情况下，用小米、水作为介质，通过观察量杯盛放介质的体积而后确定量器容积。”③

三、刘歆异径管律提供了合理的管口校正方案，元延明同径管律发音不合律

史籍记载，最早对《汉书·律历志》中这套异径管律方案进行发音效果评价的是后魏安丰王元延明。《魏书·列传》说他“博极群书，兼有文藻，……以延明博识多闻，敕监金石事……其撰《古今乐事》九章十二图，又集《器准》九篇，芳别为之注，皆行于世”④。他不但参与了撰定礼乐，还与信都芳共同研究过历算推律、黄钟算法等，曾经“聚浑天、欹器、地动、铜乌、漏刻、候风诸巧事，并图画为《器准》，并令芳算之”⑤。北魏太昌元年（532）所书的《元延明墓志》称他：“公博见多闻，朝所取访，金石之乐，受诏增损，乃详今考古，铸钟磨磬，已蔑吾陵之韵，信鄙昆庭之响。”⑥针对异径与同径两种律管的设计方案，元延明进行了实验：

后魏安丰王依班固《志》，林钟空围六分，及太簇空围八分，作律吹之，不合黄钟商徵之声。皆空围九分，乃与均钟器合。⑦

元延明认为刘歆异径管律的发音是不合律的，十二律均采用同径的做法方能合律。他的评价是否成立？最有效的验证方法是制管验声。

已知音乐考古文物以及文献、图像资料中，战国中期的江陵雨台山楚墓律管⑧、长沙马王堆 1 号汉墓出土的一套竽律⑨、王莽始建国无射律管均未发现设有豁口的痕迹，且黄钟律管是汉代确定度量衡的标准器，管身开豁口将影响量与衡的准确，因此判断汉代的律管不开豁口。⑩为了保证刘歆异径律管内径、长度数据的准确，委托专业从事 3D 打印业务的泉州市比邻三维科技有限公司，使用上海联泰科技 3D 打印机（型号 Lite600，打印长度 L < 100mm 时，打印精度 ±0.1mm），光敏树脂材料（密度 1.16g/cm3），制作 3D 打印树脂律管（见图 2），从长到短依次编号（1 号为黄钟，13 号为清黄钟），为保证律管平直度与形制准确，管壁厚度统一设为 2mm。制作完成后，使用艾瑞泽电子数显卡尺（精度 ±0.02mm/0.001″）检测律管形制，用细砂纸打磨，直至管长、内径完全符合设计值（见表 2 第 4、6 行）。

---

① “日冬至、夏至，阴阳晷景长短之极，微气之所生也。故使八能之士八人，或吹黄钟之律间竽；或撞黄钟之钟；或度晷景；权水轻重，水一升，冬重十三两。”《后汉书·礼仪中》志第五，中华书局 1965 年标点本，第 11 册，第 3125—3126 页。

② 史凯敏：《中国古代定黄钟技术钩沉》，《中国音乐》2023 年第 6 期。

③ 熊长云：《东汉铭文药量与汉代药物量制》，《中华医史杂志》2018 年第 6 期。

④《魏书》卷 20，中华书局 1974 年标点本，第 2 册，第 530 页。

⑤《北史·艺术上》卷 89，中华书局 1974 年标点本，第 9 册，第 2933 页。

⑥ 赵超：《汉魏南北朝墓志汇编》，天津古籍出版社，2008 年，第 288 页。

⑦《隋书·律历上》卷 16，第 2 册，第 393 页。

⑧ 王子初主编：《中国音乐文物大系·湖北卷》，大象出版社，1996 年，第 151 页。

⑨ 高至喜、熊传薪主编：《中国音乐文物大系·湖南卷》，大象出版社，2006 年，第 228 页。

⑩ 史凯敏：《中国古代律管造型的衍变——兼谈豁口作用》，《中国音乐》2022 年第 4 期。

中国知网 https://www.cnki.net

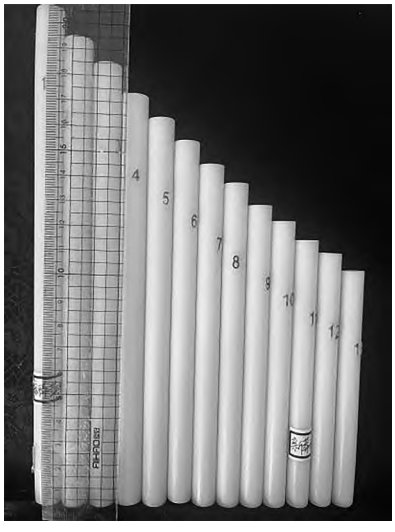


图 2　用树脂 3D 打印复原的刘歆异径管律

实验过程与方法：2023 年 5 月 27 日，在中国音乐学院地下录音棚，我们对复原的刘歆律管进行了测音实验，吹律人：史凯敏；测音操作员：罗时欢；录像：夏天。[①]朱载堉强调："凡吹律者慎勿掩其下端，掩其下端则非本律声矣。……又要持管端直，不可轩昂上端，空围不可以唇掩之，掩之过半则声郁抑，气急而猛则声焦杀，皆非其正音矣。"[②]因而，本次实验采用开管竖吹法吹律，吹奏时正直持管，放松口唇，均匀徐缓持续送气，间隔 10 秒后再次吹奏。将 13 支律管全部吹奏一遍后，再进行第二轮吹奏，全部吹奏过程同步录像。录音完成后，选择每组中音准和波形比较稳定、振幅较大的为有效样音，用 GMAS2.0 对样音数据进行音高频谱分析，统计 4 组实测音高。同时，使用经验证的开管计温律高计算公式：$F=\frac{331450}{2(l+kd)}\sqrt{\frac{647.63+2t}{637.3}}$（F 为音高频率，k 为管口校正数 *5/3*。l 表示管长，d 是管内径，t 为气温）[③]计算律管音高"理论值"，与实测数据进行比对。

由于律管发音受气流、口风的影响，不可能完全稳定不变，尤其是越短越细的律管吹奏时，所需的气量和流速就越高。因此，将每支律管所测样音频率（Hz）的最高和最低值换算音分（Ct）后作为律管实测的"音高区间"，对比三种律制的音高标准，判断律管的发声效果。

表 4　刘歆异径管律测音数据分析表

20℃	测音 1（Hz）	测音 2（Hz）	测音 3（Hz）	测音 4（Hz）	理论值（Hz）	音高区间（Ct）	低值相对音高	高值相对音高	纯律	三分损益律
黄钟	783.96	775.36	786.15	786.15	779.29	G5−19~G5+5	0	0	0	0
大吕	830.15	834.95	824.64	828.32	830.80	$^{\#}$G5−13~$^{\#}$G5+9	106	104	112	114
太簇	872.31	872.31	868.65	877.14	873.53	A5−15~A5−6	204	190	204	204
夹钟	922.98	926.08	926.04	935.42	930.73	$^{\#}$A5−17~$^{\#}$A5+6	302	301	316	318
姑洗	972.34	976.49	976.38	980	979.06	B5−27~B5−15	392	380	386	408
仲吕	1033.74	1049.63	1040.94	1043.39	1043.03	C6−21~C6+5	498	500	498	522
蕤宾	1100.82	1096.43	1095.27	1111.33	1097.02	$^{\#}$C6−21~$^{\#}$C6+4	598	599	590	612
林钟	1169.27	1159.65	1163.02	1171.64	1153.66	D6−31~D6−4	688	691	702	702
夷则	1229.57	1232.55	1225.27	1238.46	1228.70	$^{\#}$D6−22~$^{\#}$D6−8	797	787	794	816
南吕	1300.86	1292.35	1301.84	1307.88	1292.31	E6−35~E6−14	884	881	884	906
无射	1368.85	1388.00	1378.51	1386.2	1377.67	F6−35~F6−11	984	984	996	1020

① 罗时欢：任职中国音乐学院图书馆技术部，负责录音与音乐声学研究。夏天：中国音乐学院国乐系学生。

②［明］朱载堉撰，冯文慈点注：《律学新说·吹律第八》，第 42—44 页。

③ 史凯敏、刘勇：《开管管口校正数与计温律高计算公式验证——基于黄钟律管的三组实验》，《中国音乐学》2022 年第 3 期。

中国知网　https://www.cnki.net

（续表）

应钟	1447.6	1464.67	1455.93	1476.97	1447.53	#F6−38~#F6−4	1081	1092	1088	1110
清黄	1560.3	1538.52	1550.82	1572.18	1541.23	G6−33~G6+5	1186	1200	1200	1224

从表 4 的实测数据来看，刘歆异径管律的实际发音介于纯律（ ± 14 内）、十二平均律（ ± 19 内）、三分损益律（ ± 19）的律高标准之间，较接近纯律。从测音数据的低值来看各律管的相对音高(Ct)，黄钟与清黄钟仅差 14Ct 构成纯八度；而从测音的高值来看，完全是不折不扣的纯八度。古人“以耳齐其声”，声学实验证明“大多数音乐家的同一性音准感具有 ± 10 音分的宽容度，多数音乐家的和声性音准感具有 −38 至 +14 音分的宽容性”①。在主观听觉上，刘歆异径管律完全符合 G 宫的律高要求，音高准确。

表 4 还显示，对比 4 组实测值，理论值均处于“音高区间”范围之内，显示“开管计温律高计算公式”的推算符合吹律实践。因此，我们用这个公式来排除吹律时口风、角度等外在因素的影响，对元延明、刘歆的律管发音进行检验和对比。

首先确定元延明律管的形制。据记载，祖冲之子祖暅曾为元氏门客，元延明使用的应为 355/113（ π≈3.1415926 ）的祖冲之密率。《魏书》提及北魏孝文帝曾亲自参与累黍定尺的制作，“太和十九年，高祖诏，以一黍之广，用成分体，九十黍之长，以定铜尺”②，并说“（ 寻 ）[荀] 勖所造尺，与高祖所定，毫厘略同”③。荀勖尺也称为“晋前尺”，和新莽尺一样长 23.1 厘米。因此元延明黄钟与刘歆基本一致，其余十一律的差异仅在内径。

表 5　元延明同径管律、刘歆异径管律音高比对表

七声	十二律	长 L（mm）	元氏同径 D1（mm）	刘歆异径 D1（mm）	元氏七声	刘歆七声	三分损益律	纯律	平均律	元氏律偏离度	刘歆律偏离度
宫	黄钟	207.9	7.8	7.82	0	0	0	0	0		
	大吕	194.62	7.8	7.57	107	110					
商	太簇	184.8	7.8	7.37	191	198	204	204	200	−9	−2
	夹钟	173.09	7.8	7.14	297	308					
角	姑洗	164.26	7.8	6.95	381	395	408	386	400	−19	−5
	仲吕	153.86	7.8	6.73	486	504					
变徵	蕤宾	146.02	7.8	6.55	569	592	612	590	600	−31	−8
徵	林钟	138.6	7.8	6.38	652	679	702	702	700	−48	−21
	夷则	129.82	7.8	6.18	755	788					
羽	南吕	123.19	7.8	6.02	837	876	906	884	900	−63	−24
	无射	115.27	7.8	5.82	941	986					
变宫	应钟	109.49	7.8	5.67	1020	1081	1110	1088	1100	−80	−19
宫清	黄钟清	102.56	7.8	5.49	1121	1180	1224	1200	1200	−79	−20

① 韩宝强：《音的历程——现代音乐声学导论》，人民音乐出版社，2016 年，第 31 页。

②《魏书 · 律历志》卷 107，第 7 册，第 2658 页。

③《魏书 · 景穆十二王列传》卷 19 上，第 2 册，第 457 页。

中国知网 https://www.cnki.net

从表 5 来看，不论何种律制的音高标准，“不合黄钟商徵之声”的都是元延明的同径管律。按照元延明的方案，宫、商、角在听觉上尚基本合律，但在蕤宾以后，同径管较之十二平均律的偏离音程值已超过 1/3 音，远超音准感宽容度，黄钟与黄钟清发音接近大七度，在听觉上已经完全不合律了（见表 5）。正如朱载堉认为同径律管中“大吕半律，乃与黄钟全律相合，略差不远”，批评“安丰王等说，皆不足取也”[①]。这与我们以三分损益法推算长度，用 9mm 内径亚克力管制作的无豁口同径律（图 3）的测音实验表现是一致的——在蕤宾以后诸音均不合律，与黄钟八度相合的是“大吕半律”（见表 6，限于篇幅，仅列出 4 次测音的平均音高值）。

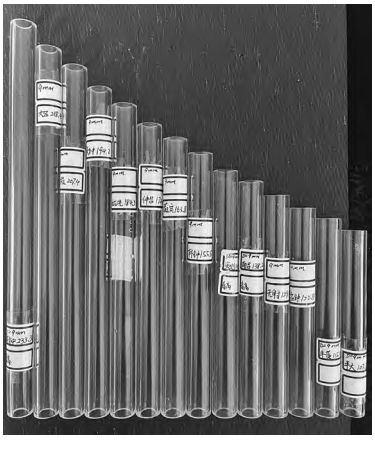


图 3　三分损益同径律管（黄钟 ~ 半大吕）

四、刘歆异径管律的意义

（一）承前启后，首次用异径设计来系统解决管口校正问题

古代的定音标准器有律（管）和（弦）准，西汉元帝时（前 49—前 33），京房作准定律，曾以弦准对比律管，发现三分损益长度的律管发音难以合律，提出“竹声不可度调”。刘歆吸取前人经验，采用以积定径设计异径律管，通过逐步缩小管径，抵消了生律时由于管口校正值造成的律高偏低问题，使管律在听觉上与弦律相合，实现了三分损益长度的律管“度调定音”的音高标准器功能。因此，刘歆是在理论上与实践中都成功实现“异径管律”，系统解决三分损益律管口校正问题的第一人。事实上，异径管律的提出有其历史渊源。王子初先生曾考证荀勖笛律、湖北曾侯乙墓出土的 13 根排箫、江陵雨台山战国墓出土的 3 支竹律管均为异径管，并感叹：“2000 多年前的古人为‘异径说’准备下了如此重要的物证，岂非一大奇迹！”[②]从这个意义上来说，刘歆的异径管律是在继承先秦异径管律与管乐器实践基础上的理论总结与创新，也启发了后世从管径入手来解决管口校正问题。

（二）突破古率，校测精密，体现了先进的汉代工艺技术

数学史研究者认为：在魏晋人刘徽使用割圆术求出“徽率”3.14 前，古人一直是以周三径一为基

表 6　三分损益同径律管发音统计表

同径三分损益律管	黄钟	太簇	姑洗	仲吕	蕤宾	林钟	南吕	应钟	半黄	半大
长度（mm）	233.3	207.4	184.34	172.6	163.8	155.5	138.2	122.88	115.04	107.8
平均音高（Hz）	686	764	861	914	962	1005	1116	1244	1278	1373
相对音程值（Ct）	0	187	394	497	586	661	843	1031	1077	1201
偏离音程值	0	−13	−6	−3	−14	−39	−57	−69	−131	合黄钟

① [明] 朱载堉撰，冯文慈点注：《律吕精义・内篇》卷 2，第 41—42 页。

② 王子初：《荀勖笛律的管口校正问题研究》，《中国音乐学》1989 年第 1 期。

中国知网 https://www.cnki.net

础来求圆面积的。[①]约成书于公元前 1 世纪的《周髀算经》，湖北张家山出土的竹简《算数书》，集先秦到西汉数学知识之大成的《九章算术》中周、径之比都是 3:1。[②]东汉光和二年（179）大司农铜斛铭文云“依黄钟律历，《九章算术》，以均长短、轻重、大小，用齐七政，令海内皆同”[③]，说明直到东汉仍采取的是《九章算术》的计算方法和古率 3。可是，从新莽无射律管及刘歆主持铸造的铜籥、铜升、铜嘉量等一系列量器在容积和内径所达到的精度上看，圆周率在 3.14159~3.1547 之间。让人极为惊叹的是，即便与科技如此发达的今天相比，无射律管所达到的制造精度也毫不逊色。笔者用 3D 打印技术复原律管时，也仅能将精度控制在 0.1 毫米的误差范围。从出土的“新莽铜卡尺”[④]的制作工艺来看，汉代测量和制造技术已相当发达。

需要思考的是，刘徽注《九章算术》是在 263 年[⑤]，始建国元年为 9 年，这是否说明刘歆早于刘徽约 260 年就发现“非周三径一之率”了呢？还是说有特殊的工艺来保障精度？如果是前者，那这绝对可算作汉代数学史与科技史上的一大突破。但令人疑惑的是，这一成果竟未出现于文献记载中，甚至被孟康“误导”，以致数千年来他的异径管律及其所总结的钟律制度屡受非议。笔者推测，刘歆并非通过算术发现新的圆周率，而是直接通过“以度审容，以水测积，以积定径”的方法，在实践中保障了律量器的准确形制，刘复先生测量新莽嘉量后核定的 3.1547 的圆周率是这一过程的结果。

结语

新莽时期的律量考古实物既验证了刘歆异径管律的设计数据与方法，也充分展现了汉代先进的制造技术与智慧。为了实现黄钟律管作为“一龠之实”的“量标准”功能，刘歆突破古率陈说，在实践中得到更精确的圆周率，通过以积定径的设计方案和“以度审容，以水测积，以积定径”的技术来解决管口校正问题，保障了器物制作精度。制管验声发现其异径管律方案满足了以管定音的音准要求，可谓管律发展史中具有突破性的进步。

在中国古代历史的发展进程中，新莽王朝为复兴周礼进行了“协时月正日，同律度量衡”的全面实践，“国师”刘歆通过阐释律—易—历的数字关系，解决了黄钟标准的合法性问题。一方面，用黄钟形制数据赋予历法“三统”功能，通过以律起历宣誓了帝王授时承自天道，为以律占候提供了释读的空间；另一方面，黄钟的律长、律容、容重作为度、量、衡的标准基值，在实际上作用于国计民生。刘歆对钟律理论的总结与实践，是其实现经学理想的明证，并为后世确定律度量衡提供了理论依据和实物模板。伴随着历代经史对《钟律书》内容的传承与书写，律作为“制事立法，物度轨则”的物质标准，成为长久影响政权稳定与国民经济的一个因素。其中，刘歆功不可没！

附言：本文系 2022 年度安徽省哲学社会科学规划项目“汉代钟律制度下的黄钟律高研究”（AHSKY2022D202）及 2022 年度国家社科基金冷门绝学研究项目“中国传统律学中的‘定黄钟术’研究”（22VJXG004）阶段性成果。

① 郭书春：《中国古代数学》，商务印书馆，1997 年，第 164—168 页。

② 郭书春：《中国科学技术史·数学卷》，第 267—268 页。

③ 传嘉庆二十年（1815）河南睢县出土。口沿及底边同铭，记载光和二年（179）大司农发布诏书，并于秋分日检定，以保证全国量制统一。今藏上海博物院。见丘光明、邱隆、杨平《中国科学技术史·度量衡卷》，第 232、246 页。

④ 1927 年甘肃定西县出土新莽始建国元年制铜卡尺一具，1992 年江苏扬州邗江甘泉镇姚湾村东汉墓出土青铜卡尺一具。由固定尺和滑动尺组成，上有计量刻度，外形和适用法类似近代卡尺，可用以测查直径、深度及长、宽、厚。见金秋鹏《中国科学技术史·图录卷》，第 494 页。

⑤ 耿济：《古典数学名著〈九章算术〉刘徽注中的千古疑谜——刘徽级数》，《海南大学学报（自然科学版）》1992 年第 1 期。

中国知网 https://www.cnki.net